



بسم الله الرحمن الرحيم

سیکنال و سیستم‌ها

دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف

پاییز ۱۳۸۹ - ۴۰۲۴۲

امتحان میان ترم ۱۳ آبان ۱۳۸۹

مدت: ۲ ساعت

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

توجه:

۱- تعداد سؤالات ۵ عدد است و در ۱ برگه‌ی پشت و رو تنظیم شده است.

۲- تمام پاسخ‌ها را تمیز و خوانا در برگه‌های پاسخ‌نامه بنویسید.

۲- تمام پاسخ‌ها باید همراه با استدلال باشد. آنچه در کتاب یا کلاس اثبات شده نیاز به اثبات ندارد.

۴- نام خود را بر روی برگه‌های سؤالات و پیش‌نویس‌ها بنویسید و در پایان امتحان تحویل دهید.

موفق باشید.

مسئله ۱- (۲۰ نمره) رابطه‌ی ورودی و خروجی یک سیستم پیوسته زمان عبارت است از:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\lambda)} x(\lambda) d\lambda$$

که در آن $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم است.

خواص زیر را در مورد این سیستم بررسی و با استدلال پاسخ دهید.

داریم $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\lambda)} x(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\lambda)} u(t-\lambda) x(\lambda) d\lambda = x(t) * (e^{-t} u(t))$ و بنابراین میان ورودی و خروجی

رابطه‌ی کانولوشن برقرار است و پاسخ ضربه‌ی سیستم $h(t) = e^{-t} u(t)$ است.

الف) بدون حافظه خیر چرا که خروجی در هر لحظه به ورودی‌های گذشته وابسته است.

ب) علی‌بله چرا که $h(t) = 0 \rightarrow t < 0$ و سیستم LTI است.

ج) پایدار بله چرا که $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 < \infty$ و سیستم LTI است.

د) خطی بله چرا که سیستم LTI است.

ه) مستقل از زمان بله چرا که سیستم LTI است.

و) معکوس پذیر بله $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \rightarrow H^{-1}(j\omega) = 1+j\omega \rightarrow h^{-1}(t) = \delta(t) + \frac{d\delta(t)}{dt}$

مسئله ۲- (۲۰ نمره) دو سیگنال متناوب $x_a[n]$ و $x_b[n]$ به ترتیب با دوره‌ی تناوب اصلی N_a و N_b و ضرایب سری فوریه‌ی a_k و b_k مفروض است. اگر $x_s[n] = x_a[n] + x_b[n]$ باشد، ضرایب سری فوریه‌ی آن s_k را بر حسب a_k و b_k به دست آورید. اگر $x_p[n] = x_a[n]x_b[n]$ باشد، ضرایب سری فوریه‌ی آن p_k را بر حسب a_k و b_k به دست آورید.

$$x[n] \xleftrightarrow{\frac{\delta_s}{N}} a_k \Rightarrow x[n] \xleftrightarrow{\frac{\delta_s}{mN}} a'_k = \begin{cases} a_{k/m} & m|k \\ \cdot & \text{else} \end{cases} \quad \text{لم:}$$

$$\text{اثبات: داریم} \quad a'_k = \frac{1}{mN} \sum_{n=(mN)} x[n] e^{-jk \frac{\gamma\pi}{mN} n} \rightarrow a'_{mk} = \frac{1}{mN} \sum_{n=(mN)} x[n] e^{-jk \frac{\gamma\pi}{N} n} = \frac{1}{m} m a_k = a_k$$

$$a'_k = \cdot \quad \text{داریم} \quad m|k \quad \text{و بنابراین برای} \quad \sum_{k=(mN)} |a'_k|^r = \frac{1}{mN} \sum_{n=(mN)} |x[n]|^r = \frac{1}{N} \sum_{n=(N)} |x[n]|^r = \sum_{k=(N)} |a_k|^r$$

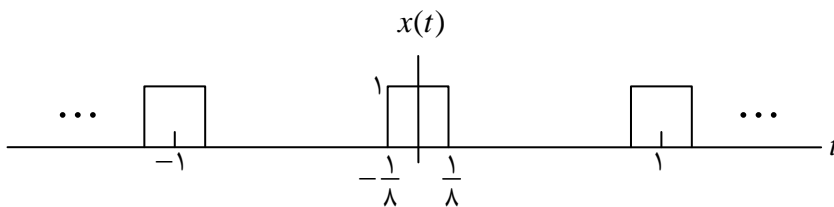
$$x_a[n] \xleftrightarrow{\frac{\delta_s}{N_a}} a_k \Rightarrow x_a[n] \xleftrightarrow{\frac{\delta_s}{N}} a'_k = \begin{cases} a_{k/m_a} & m_a|k \\ \cdot & \text{else} \end{cases} \quad \text{داریم} \quad LCM(N_a, N_b) = N, m_a = \frac{N}{N_a}, m_b = \frac{N}{N_b} \quad \text{حال اگر}$$

$$x_b[n] \xleftrightarrow{\frac{\delta_s}{N_b}} b_k \Rightarrow x_b[n] \xleftrightarrow{\frac{\delta_s}{N}} b'_k = \begin{cases} b_{k/m_b} & m_b|k \\ \cdot & \text{else} \end{cases} \quad \text{و بنابراین}$$

$$x_s[n] = x_a[n] + x_b[n] \xleftrightarrow{\frac{\delta_s}{N}} s_k = a'_k + b'_k = \begin{cases} a_{k/m_a} + b_{k/m_b} & m_a m_b | k \\ a_{k/m_a} & m_a | k \wedge m_b \nmid k \\ b_{k/m_b} & m_b | k \wedge m_a \nmid k \\ \cdot & \text{else} \end{cases}$$

$$x_p[n] = x_a[n]x_b[n] \xleftrightarrow{\frac{\delta_s}{N}} p_k = \sum_{l=(N)} a_l b'_{k-l} \quad \text{و به همین ترتیب:}$$

مسئله ۳- (۲۰ نمره) قطار پالس مربعی $x(t)$ با پهنا‌ی پالس $\frac{1}{4}$ و دوره تناوب ۱ به شکل زیر مفروض است.



الف) ضرایب سری فوریه‌ی این سیگنال را بدست آورید.

$$a_k = \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi}, k \neq 0, a_0 = \frac{1}{4} \quad \text{مطابق جدول ضرایب سری فوریه برابر است با:}$$

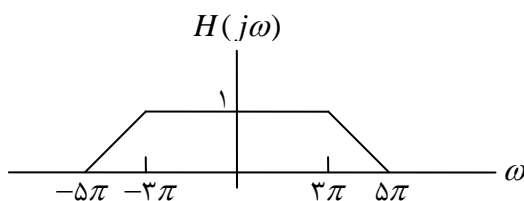
ب) مقدار ضرایب را برای مقادیر $|k| \leq 3$ محاسبه و به دقت رسم کنید.

$$\text{به سادگی به دست می آید که: } a_1 = a_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}, a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2\pi}, a_3 = a_{-3} = \frac{\sqrt{2}}{6\pi}$$

ج) سیگنال فوق از یک فیلتر پایین گذر با مشخصه‌ی فرکانسی $H(j\omega)$ (به شکل زیر) گذر می‌کند. ضرایب سری فوریه‌ی خروجی فیلتر و تابع زمانی آن $y(t)$ را بدست آورید و تا حد ممکن ساده کنید.

برای عبور a_k از فیلتر باید $|2k\pi| < \Delta\pi$ که در نتیجه

$$y(t) = a_0 + 2a_1 \cos(2\pi t) + a_2 \cos(4\pi t)$$



مسئله ۴- (۲۰ نمره) اطلاعات زیر در مورد سیگنال گسسته زمان $x[n]$ در دست است.
الف) $x[n]$ حقیقی و فرد است.

ب) $x[n]$ متناوب است با دوره‌ی تناوب $N = ۶$

ج) $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = ۱۰$

د) $\sum_{n=\langle N \rangle} (-1)^{n/r} x[n] = ۶j$

ه) $x[۱] > ۲$

رابطه‌ای برای $x[n]$ به شکل سینوسی (و یا کسینوسی) بدست آورید.

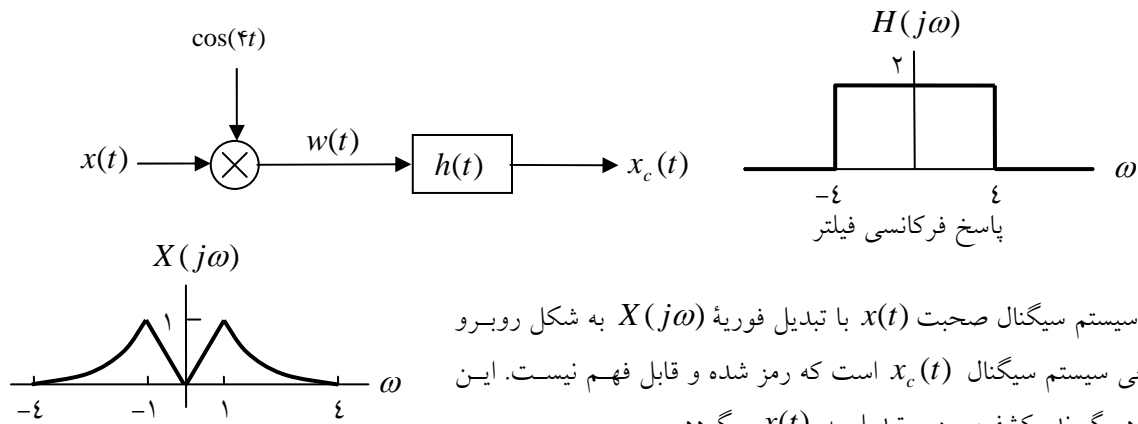
از الف و ب نتیجه می‌شود که: $(a_r = -a_{-r} \wedge a_{-r} = a_{-r+۶} = a_r \Rightarrow a_r = ۰)$, $a_۰ = ۰, a_k = -a_{-k}$

از د و الف نتیجه می‌شود که: $a_۱ = -j, a_۲ = j, a_۳ = -j, a_۴ = j, a_۵ = -j$

سپس از ج نتیجه می‌شود که: $a_r = \pm ۲j, a_r = -a_{-r}$

نهایتاً از د نتیجه می‌شود که $a_۲ = -۲j = -a_{-۲}$ و بنابراین $x[n] = ۴ \sin\left(\frac{۲\pi}{۳}n\right) + ۲ \sin\left(\frac{\pi}{۳}n\right)$

مسئله ۵- (۲۰ نمره) یک سیستم رمز کننده تلفن از یک ضرب کننده و یک فیلتر پایین گذر ایده آل که مشخصه فرکانسی آن در شکل نشان داده شده است مطابق شکل زیر تشکیل می‌شود.

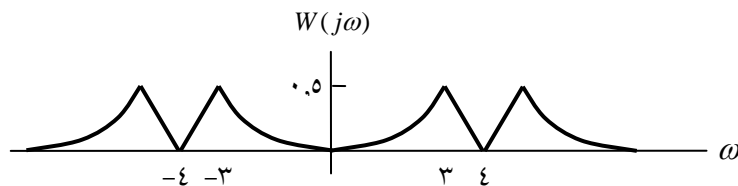


ورودی این سیستم سیگنال صحبت $x(t)$ با تبدیل فوریه $X(j\omega)$ به شکل روبرو است. خروجی سیستم سیگنال $x_c(t)$ است که رمز شده و قابل فهم نیست. این سیگنال بعداً در گیرنده کشف رمز و تبدیل به $x(t)$ میگردد.

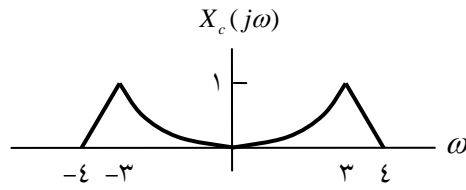
الف) تبدیل فوریه خروجی ضرب کننده، $W(j\omega)$ را برحسب $X(j\omega)$ بدست آورده و با دقت رسم کنید.

داریم

$$\cos(4t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi [\delta(\omega-4) + \delta(\omega+4)] \Rightarrow W(j\omega) = \frac{1}{\pi} X(j\omega) * [\delta(\omega-4) + \delta(\omega+4)] = \frac{1}{\pi} X(j(\omega-4)) + \frac{1}{\pi} X(j(\omega+4))$$



ب) تبدیل فوریه خروجی سیستم، $X_c(j\omega)$ را رسم کنید.



چرا که $X_c(j\omega) = W(j\omega)H(j\omega)$

ج) با مقایسه طیف خروجی و طیف ورودی توضیح دهید چرا $x_c(t)$ قابل فهم نیست.

چرا که فاز سیگنال ثابت و اندازه‌ی طیف تغییر کرده است و گوش تنها به تغییرات فاز غیر حساس است.

د) با توجه به نحوه تغییر شکل طیف سیگنال در هنگام رمز شدن، یک سیستم معکوس (سیستم کشف رمز) برای این رمز کننده پیشنهاد کنید. از همین سیستم رمز کننده برای کشف رمز می توان استفاده کرد.